Серия 27. И снова инверсия.

1. Две окружности Γ_1 и Γ_2 касаются друг друга внешним образом. Общая внешнаяя касательная t_1 касается Γ_1 и Γ_2 в точках A и D, соответственно. Параллельная t_1 прямая t_2 касается Γ_1 и пересекает Γ_2 в точках E и F. Прямая t_3, проходящая через D, пересекает t_2 и окружность Γ_2 в точках B и C, соответственно, отличных от E и F. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC касается прямой t_1.

2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P такая, что $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Докажите, что биссектрисы углов $\angle ABP$ и $\angle ACP$ пересекаются на отрезке AP.

3. Пусть p – полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой AB таковы, что $CE = CF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника EFC касается вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AB.

4. Дан остроугольный треугольние ABC, в котором $AB < AC$. Точки E и F – оскования высот из вершин B и C, соответственно. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает BC в точке P. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, пересекает EF в точке Q. Докажите, что PQ перпендикулярна медиане треугольника ABC, выходящей из вершины A.

5. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружность ω касается окружности Ω в точке T и касается отрезков AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников TAK, TBK, TAL и TCL, лежат на одной окружности.

6. (Теорема Фейербаха) Докажите, что окружность девяти точек касается вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника.

Указание: Пусть M – серeжина стороны BC треугольника ABC, а T – точка касания вписанной окружности с BC. Сделайте инверсию с центром M и радиусом MT и досчитайте недостающее.

7. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Обозначим через O_a центр окружности, описанной около треугольника AA_BA_C. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $O_aO_bO_c$, касается описанной окружности исходного треугольника.

8. a) Докажите, что две непересекающиеся окружности S1 и S2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

b) **(Поризм Штейнера.)** Докажите, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, ..., S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, ..., T_n$.