Функциоальные уравнения. Начало.

1. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что для любого $x > 0$ выполнено $2f(x)+f(\frac{1}{x}) = 3x-\dfrac{3}{x}$.

2. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x) + f(f(x) - y^3) = f(x^2 + y).$$

3(Корея, 2000). Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых действительных x и y выполнено

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

4. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2019(x - y)^2.$$

Что-то про аддитивность.

Определение. Функция ϕ называется *аддитивной*, если для любых a, b выполнено $\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$.

Факт. Существуют нелинейные аддитивные функции на числовой прямой. Но они устроены очень плохо и конструктивон их построить не получается.

5. Известно, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ аддитивна.
а) Докажите, что для любых рациональных α и β и любых действительных x, y выполнено $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
б) Рассмотрим внутренность квадрата $M = \{(x, y)\,|\,2019 < x < 2020,\, 1000 < y < 1001\}$. Предположим, что функция f не является прямой пропорциональностью, то есть для некоторых u и v выполнено $uf(v) \neq vf(u)$. Докажите, что какая-то точка "графика" функции f лежит в M.

6. Докажите, что любая а) монотонная; б) непрерывная аддитивная функция является линейной.

7. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x^2 + y) = f(x)^2 + f(y).$$

8.** Докажите, что существует нелинеёная аддитивная функция на числовой прямой.
Комментарий. А после этого разрежьте яблоко на части и сложите из этих частей два таких же яблока.

Рубрика "Намедни".

20-8. Каждой из n участниц EGMO присвоен один из номеров $C_1, ..., C_n$. После олимпиады они выстраиваются в очередь перед рестораном согласно следующим правилам:
• Жюри выбирает начальную расстановку участниц в очереди.
• Каждую минуту Жюри выбирает некоторое число i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant n$.
– Если перед участницей C_i стоят по крайней мере i других участниц, она платит Жюри один евро и перемещается в очереди вперёд ровно на i позиций.
– Если перед участницей C_i стоит менее, чем i других участниц, ресторан открывается и процесс заканчивается.
а) Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго вне зависимости от действий Жюри.
b) Для каждого n найдите наибольшее количество евро, которое Жюри может получить, выбрав начальную расстановку участниц и последовательность ходов.