Экстремальные задачи со сложным условием.

1. На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?

2. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между ними. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более чем на n, увеличилось?

3. Даны натуральные числа k и n, причём $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей на доске $n \times n$ можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из этих выбранных ладей не били одна другую?

4. Вася записал числа $1, 2, \ldots 100$ на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k. При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

5. Имеется 1000 яблок. Известно, что как бы их не раскладывали на 10 мешков по 100 яблок, обязательно найдутся два мешка одинаковой массы. Для какого наибольшего k можно утверждать, что есть k яблок с одинаковой массой?

6. Пусть X — множество, состоящее из 56 элементов. Найдите наименьшее натуральное n такое, что выполняется следующее условие: для любых 15 подмножеств множества X, если объединение любых семи из этих 15 подмножеств содержит хотя бы n элементов, то найдутся три из этих 15 подмножеств с непустым пересечением.