Серия 20. Разнобой.

1. Вова и Влад играют в игру на доске 100×100. В начале в каждой клетке написано число 0. Каждым ходом они выбирают столбец или строку и ко всем выбранным числам прибавляют по 1. Игроки по очереди делают 200 ходов (по 100 ходов каждый), после чего игра заканчивается. Вова ходит первым и хочет, чтобы в итоге больше половины чисел давало остаток 1 при делении на 3, а Влад – вторым, и хочет, чтобы в итоге больше половины чисел на 3 делилось. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Существует ли бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, удовлетворяющая равенству

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

для любого натурального значения n?

3. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность Γ_B проходит через вершины A и B и касается AC, окружность Γ_C проходит через вершины A и C и касается AB. Через точку A провели прямую, которая повторно пересекла Γ_B в точке X и Γ_C в точке Y. Докажите, что $OX = OY$.

4. Даны $a_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что

$$((1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \cos x_i)^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \sin x_i)^2)^2 \geq 4(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i)^3$$

5. В канун рождества 100 рыцарей собрались за круглым столом. Наутро каждый помнил, рядом с кем он сидел, но не помнил, кто из соседей был справа, а кто слева. Мерлин хочет рассадить их так, чтобы каждый из них снова оказался рядом со своими вчерашними соседями. Какое минимальное число вопросов ему для этого нужно задать?

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Псть ω_a, ω_b, ω_c — описанные окружности треугольников EAF, DBF и DCE соответственно. Прямые DE и DF пересекают ω_a в точках $E_a \neq E$ и $F_a \neq F$ соответственно. Обозначим через r_a прямую E_aF_a. Аналогичным образом определим прямые r_b и r_c. Докажите, что вершины треугольника, образованного прямыми r_a, r_b и r_c, лежат на сторонах треугольника ABC.

7. Натуральные числа m и n взаимно просты и $m > 1, n > 1$. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c такие, что $m^a = 1 + n^b c$, и n и c взаимно просты.

8. Каждой из n участниц EGMO присвоен один из номеров $C_1, \ldots, C_n$. После олимпиады они выстраиваются в очередь перед рестораном согласно следующим правилам:
- Жюри выбирает начальную расстановку участниц в очереди.
- Каждую минуту Жюри выбирает некоторое число i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant n$.

– Если перед участницей C_i стоят по крайней мере i других участниц, она платит Жюри один евро и перемещается в очереди вперёд ровно на i позиций.
– Если перед участницей C_i стоит менее, чем i других участниц, ресторан открывается и процесс заканчивается.
a) Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго вне зависимости от действий Жюри.
b) Для каждого n найдите наибольшее количество евро, которое Жюри может получить, выбрав начальную расстановку участниц и последовательность ходов.