Серия E, она же 112, она же 1110.

1. а) Докажите, что сумма цифр десятичной записи числа n равно наименьшему количеству степеней десятки, сумма которых может быть равна n.
б) Обозначим $S(n)$ сумму цифр числа n. Докажите, что $S(ab) \leqslant S(a)S(b)$.

2. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр десятичной записи числа n. Назовём натуральное число k *хорошим*, если существует такая константа $M(k)$, что $\frac{S(n)}{S(nk)} < M(k)$ для любого натурального n. Известно, что различные числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — хорошие. Докажите, что

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_m} < \frac{5}{2}.$$

3. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3k) = 3f(k)$, $f(3k+1) = 3f(k)+2$, $f(3k+2) = 3f(k)+1$. Сколько существует таких $n < 2018$, для которых $f(n) = 2n$?

4. Существует ли такое множество целых неотрицательных чисел M, что любое натуральное n представляется в виде суммы $a + 2b$, где $a, b \in M$ единственным образом?

5. Гоша загадал многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого — целые неотрицательные числа. Лиза может спрашивать значение многочлена в любой целой точке. Какого наименьшего количества вопросов хватит Лизе, чтобы восстановить многочлен?

6(Формула Лежандра). Докажите, что степень вхождения простого числа p в разложение числа $n!$ на простые множители (обозначаем $\nu_p(n!)$) равна

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

7(Теорема Куммера). Дано простое число p. Запишем числа m и n в системе счисления по основанию p: $n = b_kp^k + b_{k-1}p^{k-1} + \ldots + b_1p + b_0$ и $m = c_kp^k + c_{k-1}p^{k-1} + \ldots + c_1p + c_0$, $m + n = a_kp^k + a_{k-1}p^{k-1} + \ldots + a_1p + a_0$.
а) Докажите, что $\nu_p(C^n_{m+n})$ равно количеству переносов при сложении m и n в столбик.
б) Докажите, что степень вхождения числа p в C^m_{n+m} равна $\frac{1}{p-1}(\sum(b_i + c_i) - \sum a_i)$.

8(Теорема Лукаса). В обозначениях предыдущей задачи докажите, что

$$C^n_{m+n} \equiv \prod_{i=0}^{k} C^{b_i}_{a_i} \pmod p.$$

Домашнее задание.

9. Let $\sqrt{3} = 1.b_1b_2b_3\ldots_{(2)}$ be the binary representation of $\sqrt{3}$. Prove that for any positive integer n, at least one of the digits $b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n}$ equals 1.

10. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке D. Биссектриса угла A пересекает BC и Ω в точках E и F. Описанная окружность треугольника DEF пересекает вневписанную окружность, касающуюся стороны BC в точках S_1 и S_2, а окружность Ω в точке $T \neq F$. Докажите, что AT проходит через S_1 или S_2

Рубрика "Намедни".

6-6(будет разобрана 26 ноября в 18:00). Для каждой грани многогранника провели вектор, перпендикулярный ей, смотрящий вовне, длина которого численно равна площади этой грани. Докажите, что сумма указанных векторов равна нулю.

6-7(странно, что никто не решил). В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или пароходом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

9-5. а) Назовём паросочетание совершенным, если оно разбивает на пары все вершины. Пусть в графе G есть совершенное паросочетание, содержащее ребро ab, но не содержащее ребро cd, и совершенное паросочетание, содержащее ребро cd, но не содержащее ребро ab. Пусть также известно, что a соединена с вершинами c и d. Докажите, что в графе существует совершенное паросочетание, не содержащее рёбер ab и cd.

б) В Графе G нельзя выделить совершенное паросочетание, но это свойство нарушается при добавлении любого ребра. Докажите, что если удалить из него все вершины степени $|G|-1$, то граф распадётся на компоненты связности, каждая из которых является полным графом.

в) **(W. T. Tutte, 1947.)** Обозначим как $o(G)$ количество компонент связности в графе G с нечётным количеством вершин, а как $V(G)$ – множество вершин. Докажите, что в графе G можно выделить совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G-S) \leqslant |S|$.

г) **(C. Berge, 1958.)** Пусть $\alpha(G)$ – размер максимального паросочетания. Назовём дефицитом графа G величину $def(G) = |G| - 2\alpha(G)$. Докажите, что $def(G) = \max\limits_{S \subset V(G)} o(G-S) - |S|$.

26.11 в 18:20 будут разобраны только пункты а-в, но полезно напомнить, что пункт г) тоже был