Серия 11. Геометрия.

Что-то из старого.

4-8. Let five points on a circle be labelled A, B, C, D, and E in clockwise order. Assume $AE = DE$ and let P be the intersection of AC and BD. Let Q be the point on the line through A and B such that A is between B and Q and $AQ = DP$ Similarly, let R be the point on the line through C and D such that D is between C and R and $DR = AP$. Prove that PE is perpendicular to QR.

6-8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

10-6. Две окружности Ω_1 и Ω_2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω_1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω_2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω_1 делит отрезок BC пополам.

Новые задачи.

1. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Аналогичным образом определяются точки B' и C'. Точки A', B', C' лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

2. Хорда CD окружности перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит радиус OC пополам. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

3. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C. Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.