

## Серия 10. Разнобой.

1. Сумма неотрицательных чисел  $a, b, c, d$  равна 1. При каких значениях этих переменных достигается наибольшее значение выражения  $a^2b^3c^4d^5$ ?
2. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667
3. Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  существует такое  $F(m, n)$ , что в любом множестве из хотя бы  $F(m, n)$  точек на плоскости найдётся либо  $m$  точек в общем положении, либо  $n$  точек на одной прямой.
4. Правитель страны  $S$ , имеющей форму квадрата со стороной 2км хочет созвать всех жителей на съезд. Для созыва всех он отправляет помощника, который может передать любое указание любому жителю, в частности может попросить дойти до другого жителя и передать указание ему. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома. Скорость каждого жителя (в том числе и помощника) 3 км/ч. По стране можно перемещаться по прямой в любом направлении без всяких препятствий. Докажите, что, зная расположение домов, правитель может добиться того, что все жители соберутся в месте съезда за 7 часов.
5. Дано натуральное число  $n$ . Докажите, что существует такое натуральное  $m$ , что число  $m^3 + 17$  делится на  $3^n$ , но не на  $3^{n+1}$ .
6. Две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  касаются внешним образом в точке  $Q$ . Их общая внешняя касательная касается  $\Omega_1$  в точке  $B$ . Через точку  $A$ , диаметрально противоположную  $B$ , проведена касательная к  $\Omega_2$ , которая касается этой окружности в точке  $C$ , лежащей по ту же сторону от прямой  $AQ$ , что и  $B$ . Докажите, что  $\Omega_1$  делит отрезок  $BC$  пополам.