Отборочная олимпиада.

1. В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причём одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?

Ответ: на 2^6

Решение:

Отщепим от числа из условия «хвост» из последних 8 цифр. Оставшееся число оканчивается на 8 нулей, поэтому делится на 2^8. А «хвост» имеет вид $\overline{abababab} = \overline{ab} \cdot 1010101$, где a и b – цифры. Ясно, что двойки в разложении «хвоста» на простые множители идут только из числа $\overline{ab}$. Наибольшая степень двойки, на которую оно может делиться, не более шестой ($2^7 = 128$ уже трехзначно). Тогда и исходное число делится не более чем на шестую степень двойки. Это достигается для числа 6464646464.

2. Точки, лежащие на сторонах правильного треугольника, покрасили в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник, все вершины которого окрашены в один цвет.

Решение:

Пусть не так. Обозначим вершины треугольника как A, B и C и будем считать, что его сторона равна 1.
Докажем, что если отрезок с концами на сторонах треугольника перепендикулярен одной из его сторон, то его концы покрашены в разные цвета.
Без ограничения общности можно считать, что это отрезок $XY, X \in AB, X \in BC$. Пусть и X, и Y покрашены в первый цвет. Для любой точки $Z \in BC, Z \neq Y$ треугольник XYZ прямоугольный, значит, Z покрашена во второй цвет. Получается, что все точки на стороне BC, кроме Y, покрашены во второй цвет. Докажем, что любая точка T на AB, отличная от X, покрашена в первый цвет. Её проекция T_1 на BC обязательно покрашена во второй цвет, значит, если мы выберем на BC третью точку T_2, отличную от T_1 и Y, вершины T_1 и T_2 прямоугольного треугольника TT_1T_2 будут покрашены во 2й цвет, следовательно, T покрашена в первый цвет. Значит, все точки на AB покрашены в первый цвет, аналогично, все точки на AC покрашены в первый цвет. Теперь мы можем без труда выбрать точку P_1 на стороне AC, её проекцию P_2 на сторону AB и точку P_3 на AB, отличную от P_2, и получить одноцветный прямоугольный треугольник $P_1P_2P_3$. Противоречие. $\square$
Выберем точки E, F и G на сторонах AB, AC и BC соответственно так, что $AE = BG = CF = \frac{1}{3}$. В треугольнике AEF $\angle EAF = 60°, AF = 2 \cdot AE$, следовательно, $\angle AEF = 90°$, значит, E и F покрашены в разные цвета. Аналогично, E и G покрашены в разные цвета, а также G и F покрашены в разные цвета. Значит, E и F покрашены в один и тот же цвет. Противоречие. Что и требовалось доказать.

3. Дано натуральное число n. Определим $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$, $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что $[a_n] = [b_n]$. ($[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Решение:
1. Докажем, что $a_n < b_n$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \sqrt{n+1} &< \sqrt{4n+2} \\
n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1 &< 4n + 2 \\
2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n} &< 4n + 2 \\
2\sqrt{n^2+n} &< 2n + 1 \\
4(n^2+n) &< 4n^2 + 4n + 1 \\
4n^2 + 4n &< 4n^2 + 4n + 1
\end{aligned}$$

Последнее неравенство не вызывает сомнений.

2. Докажем, что $a_n > \sqrt{4n+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \sqrt{n+1} &> \sqrt{4n+1} \\
n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1 &> 4n + 1 \\
2\sqrt{n}\sqrt{n+1} &> 2n \\
\sqrt{n^2+n} &> n \\
n^2 + n &> n^2
\end{aligned}$$

Последнее неравенство верное.

3. Но заметим, что $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$. Предположим противное. Тогда обозначим $a = [\sqrt{4n+2}]$. Получаем неравенство $\sqrt{4n+2} \geqslant a > \sqrt{4n+1}$. После возведения в квадрат получим $4n+2 \geqslant a^2 > 4n+1$. Но такое может быть, только если $a^2 = 4n+2$. Но квадрат натурального числа не может давать остаток 2 при делении на 4. Противоречие.

4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырёхугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

Решение:

Пусть BB_1 и CC_1 - высоты треугольника. Так как OB_0 и OC_0 - серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки B_1B_0 и C_1C_0 равны высотам ромба $OPHQ$. Значит, $B_1B_0 = C_1C_0$.Но эти отрезки являются проекцияим отрезка OH на прямые AB и AC, поэтому, OH составляет равные углы с этими прямыми. Это означает, что прямая OH параллельна либо внутренней, либо внешней биссектрисе угла BAC.

Так как $\angle AOC = 2\angle B$ (вписанный и центральный углы в описанной окружности треугольника ABC), то $\angle CAO = 90^\circ - \angle B = \angle BAH (OA = OC$, как радиусы). Это значит, что лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы l угла A. Поэтому OH пересекает l и не может быть ей параллельна. Итак l перпендикулярна OH(так как внутренняя и внешняя биссектрисы перпендикулярны), то есть является биссектрисой и высотой треугольника AOH. Отсюда $AH = AO$ и точка A, как и точки P,Q лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH.

5. В стране $2018n+1$ городов. При каких n некоторые пары из них можно соединить двусторонними дорогами так, чтобы для любого города C и любого $1 \leqslant i \leqslant 2018$ существовало ровно n городов, находящихся на расстоянии i от города C? (Расстояние между городами — количество дорог в кратчайшем пути между ними.)

Ответ: при чётных n.

Решение:
1. Докажем, что если n — нечётное число, то провести дороги необходимым образом не получится. Предположим, удалось провести дороги, тогда, взяв $i = 1$, получим, что из каждого города выходит ровно n дорог. Но тогда получается, что в графе нечётное число вершин, и у каждой нечётная степень. Так не бывает.

2. Покажем, как при $n = 2m$ провести нужную сеть дорог. Расположим наши города по кругу. Будем соединять дорогой те города, на меньшей дуге между которыми не более $m-1$ других.
Утверждение. *Если на меньшей дуге между городами ровно k городов, где $(l-1)m \leqslant k < lm$, то расстояние между городами равно l.*
Доказательство. Очевидно.

Таким образом, от каждого города ровно $2m$ городов на расстоянии l: по m в одну и в другую сторону.