Отбор на осенние сборы. 2018-2019 учебный год. 10 класс.

1. Даны натуральные числа m и n. Для какого наименьшего k верно такое утверждение: среди любых k человек найдутся m попарно незнакомых или найдётся человек, у которого не менее n знакомых?

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, а точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает CD в точке E, а описанную окружность ω треугольника ADE вторично пересекает в точке F. Докажите, что если угол $\angle ADF = 45^\circ$, то CF является касательной к окружности ω.

3. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$

4. Вася выписал в ряд 10 неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. После чего Петя должен стереть несколько из них (возможно ни одного, но не все), перед несколькими из остальных поставить знак "плюс", перед оставшимися —- знак "минус" и посчитать модуль получившегося выражения. Петя хочет получить как можно меньшее значение. Какого наименьшего значения он может добиться вне зависимости от действий Васи?

5. Окружность ω проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AC и AB в точках D и E соответственно. На луче BD отметили точку K так, что $|BK| = |AC|$. На луче CE отметили точку L так, что $|CL| = |AB|$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на окружости ω.

6. Найдите максимум выражения $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^4 - x_i^5)$, если $x_i \geqslant 0$ и $x_1 + ... + x_n = 1$

Отбор на осенние сборы. 2018-2019 учебный год. 10 класс.

1. Даны натуральные числа m и n. Для какого наименьшего k верно такое утверждение: среди любых k человек найдутся m попарно незнакомых или найдётся человек, у которого не менее n знакомых?

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, а точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает CD в точке E, а описанную окружность ω треугольника ADE вторично пересекает в точке F. Докажите, что если угол $\angle ADF = 45^\circ$, то CF является касательной к окружности ω.

3. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$

4. Вася выписал в ряд 10 неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. После чего Петя должен стереть несколько из них (возможно ни одного, но не все), перед несколькими из остальных поставить знак "плюс", перед оставшимися —- знак "минус" и посчитать модуль получившегося выражения. Петя хочет получить как можно меньшее значение. Какого наименьшего значения он может добиться вне зависимости от действий Васи?

5. Окружность ω проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AC и AB в точках D и E соответственно. На луче BD отметили точку K так, что $|BK| = |AC|$. На луче CE отметили точку L так, что $|CL| = |AB|$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на окружости ω.

6. Найдите максимум выражения $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^4 - x_i^5)$, если $x_i \geqslant 0$ и $x_1 + ... + x_n = 1$