Серия 37. Линейные реккуренты.

Последовательность чисел a_0, a_1, ..., a_n, ..., которая удовлетворяет с заданными p и q соотношению

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

называется *линейной рекуррентной последовательностью второго порядка.*

Уравнение

$$x^2 - px - q = 0$$

называется *характеристическим* уравнением последовательности $\{a_n\}$.

1. Пусть последовательности a_n b_n являются линейными рекуррентными последовательностями второй порядка, с одинаковыми p и q. Докажите, что последовательность $\alpha a_n + \beta b_n$ также является реккурентной последовательностью второго порядка (с теми же p, q).

2. (a) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = bx_0^n$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения $x^2 - px - q = 0$.

   (b) Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что $a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$ ($n \geqslant 0$).

3. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями:

   (a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n \geqslant 0$;

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $n \geqslant 0$;

   (c) *Числа Фибоначчи.* $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geqslant 0$.

4. Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет корень x_0 кратности 2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = (c_1 + c_2n)x_0^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

5. **Снова было, но теперь для** k Археолог нашёл n золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них всётаки фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы. Если одна чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 1 фунт и 2 фунта в случае равновесия. При каком наибольшем n можно найти фальшивую монету, заплатив не более k фунтов?

6. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-ом году роста первоначального растения?

7. Биолог выращивает микробов, живущих по следующему принципу: в первый день после рождения, ровно в 8:30 каждый микроб порождает 5 новых микробов. во второй и последующие дни после рождения ровно в 9:00 каждый съедает 4 (новорожденных) микроба. Изначально у биолога был 1 микроб, сколько микробов будет у него на n-ый день?

8. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

9. В нулевой момент времени в вершине A шестиугольника $ABCDEF$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин, выбирая направление случайным образом равновероятно. Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?