

Серия 34. Разнобой

1. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика - отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?
2. Все целые числа от -33 до 100 включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получиться целое число?
3. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих— сможет?
4. Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идёт стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на её концах?
5. По кругу разложено чётное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более, чем на 1 г.
6. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

Домашнее задание

7. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n , увеличенные на 1. Найдите все такие числа n , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m . (Собственными делителями натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)
8. Квадрат разбит на $n^2 > 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).