Серия 33. Разнобой

1. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

2. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях

3. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

4. На кольцо свободно нанизано 2019 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последедвоательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг?

5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

6. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

Домашнее задание

7. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые

8. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 не делится на n^b+1