

Графы. Испанцы. Двудольность.

Определение. Граф, вершины которого можно покрасить в два цвета так, чтобы вершины одного цвета не были соединены ребром, называется **двудольным**.

Замечание. Для двудольного графа сумма степеней вершин одной доли равна сумме степеней вершин другой доли, а также общему числу ребер.

1. Все 10 мужчин испанской деревни хоть раз в жизни танцевали танго. Причем первый испанец танцевал ровно 1 раз, второй испанец — ровно 2 раза, ..., десятый — ровно 10 раз. Сколько могло быть девушек в этой деревне, если известно, что каждая из них танцевала ровно пять раз?
2. На карнавал вышло больше 30, но меньше 40 жителей Испании (испанцев и каталонцев). Каждый испанец дружит с тремя каталонцами, а каждый каталонец — с пятью испанцами. Сколько человек вышло на карнавал?
3. В Испании проживают каталонцы и испанцы. Каждый каталонец знаком с шестью каталонцами и девятью испанцами, а испанец — с десятью каталонцами и семью испанцами. Кого в этой стране больше — каталонцев или испанцев?
4. Во время сиесты несколько людей сидели на веранде и наслаждались жизнью. У каждого из них ровно 5 знакомых мужчин и ровно 5 знакомых женщин среди присутствующих. Докажите, что число людей на веранде делится на 4.

Обратите внимание! С игрой или процессом всегда связан граф: позиции — вершины, ходы — рёбра. Полезно знать, когда этот граф — двудольный.

5. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?
6. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10, как на рисунке. Дана прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. На клетке 1 Дана была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Дана на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

7. На прямой сидят (а) две; (б) три цикады. Каждую минуту одна из цикад перепрыгивает через одну другую. Могут ли все цикады оказаться на своих местах ровно через 101 прыжок?
8. Можно ли расставить 77 шахматных коней на доске 100×100 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?