

Разной по теории чисел

Бог создал целые числа, всё
остальное — дело рук человека.

Леонид Кронекер

Напоминание. Число называется *простым*, если у него ровно два делителя: 1 и оно само.

Теорема, в которую мы поверим. Каждое натуральное число n можно представить в виде произведения степеней простых множителей $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ с точностью до перестановки множителей.

1. Всегда ли верны следующие утверждения?
 - (а) если a делится на 24 и a делится на 15, то a делится на 360;
 - (б) если a^2 делится на 3, то a делится на 3;
 - (в) если a^2 делится на 8, то a делится на 4;
 - (г) если a^2 делится на 8, то a делится на 8.
2. Натуральное число возвели в квадрат. Может ли результат оканчиваться на 66?
3. Число $\overline{42X4Y}$ делится на 72. Найти его цифры X и Y .
4. Сумма трех различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A ?
5. Натуральные числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.
6. На доске записано число 3^{2019} . Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо полученного числа записали сумму его цифр. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется однозначное число. Найдите это число.
7. Эрнест написал на доске два числа, перемножил их и получил четырёхзначное число. После этого он заменил буквы на числа, причём разным числам соответствуют разные буквы. В итоге получилось $AB \cdot CD = EEFF$. Докажите, что Эрнест ошибся.
8. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 37$.
9. Количество различных делителей некоего натурального числа нечетно. Докажите, что это число полный квадрат.