Доказательство от противного

суперматвертикаль

15.12.18

1. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро — братья.

2. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

3. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются не менее, чем на 3.

4. Узлы квадратной сетки покрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.

5. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым?
(a) Можно **(b)** Нельзя
переворачивать цифры, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.

6. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.

Принцип Дирихле. *Если рассадить $nk+1$ кроликов по k клеткам, найдется клетка, в которой будет сидеть хотя бы $n+1$ кролик.*

7. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

8. Агентство закупило 50 разнообразнейших лопат. Докажите, что среди них найдется 8 одинаковых или 8 попарно разных лопат.

9. **(П)** Квадрат 8×8 разрезали по линиям сетки на 11 прямоугольников так, что длина каждой стороны любого прямоугольника не меньше, чем две клетки. Докажите, что среди этих прямоугольников есть квадрат.

10. В каждой клетке доски 4×4 сидит рыцарь или лжец. Каждый сказал, что все его соседи (чьи клетки имеют хотя бы одну общую точку с его клеткой) — лжецы. Докажите, что наибольшее возможное число рыцарей на доске равно 4.

11. Можно ли покрыть квадрат 3×3 тремя квадратами 2.99×2.99?