

## Уравнения в целых числах

### Защикливание остатков

1. Решите в целых числах уравнение:  $x^2 - 3y^2 = 8$ .
2. Решите в целых числах уравнение:  $x^2 + y^2 = 4z - 1$ .
3. Решите в целых числах  $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$ .

### Зажать между двумя квадратами или степенями

4. Найдите все такие натуральные  $x$ , для которых  $x^2 + 4x - 1$  является точным квадратом.
5. При каких натуральных число  $n^3 + 3n^2 + 7$  является точным кубом натурального числа?

### Спуск

6. Решите в целых числах уравнение  $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ .
7. Решите в целых числах уравнение  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ .

### Алгебраические преобразования помогают

8. Найдите все такие целые  $x$  и  $y$ , что
  - (a)  $xy + x + y + 1 = 0$ .
  - (b)  $xy + x - 3y = 4$ .
9. Докажите, что уравнение  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$  не имеет решений в нечётных натуральных числах.
10.
  - (a) Решите в целых числах:  $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0$ .
  - (b) Решите в целых числах:  $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0$ .