Выигрышные и проигрышые стратегии.

1. На доске написано число 12345. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Кто выиграет при правильной игре?

2. В крайних клетках полоски 1×103 стоит по фишке. Саша и Паша ходят по очереди: за ход можно сдвинуть свою фишку вправо или влево на любое количество клеток от 1 до 4, но нельзя перепрыгивать через фишку противника и ставить две фишки на одну клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Саша. Кто выигрывает при правильной игре?

3. **(a)** Двое играют в такую игру: на столе лежат 7 монет по два фунта и 7 монет по одному фунту. За ход разрешается взять монет на сумму не более трех фунтов. Забравший последнюю монету выигрывает. Кто победит при правильной игре? **(b)** Тот же вопрос, если и тех, и других монет — по 12.

4. **(a)** Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.
(b) Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

5. На доске написано число 10^{2018}. Двое играют в следующую игру. За один ход с доски можно стереть два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведение дающих n, но меньших его. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. На столе лежат 444 спички. За ход разрешается взять 3, 4 или 7 спичек. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

7. На столе лежит 300 монет. За ход разрешается забрать не более половины имеющихся монет. Проигрывает тот, кто не может забрать хотя бы одну монету. Кто выиграет при правильной игре?

8. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

9. Выписаны в ряд числа от 1 до 2002. Играют двое, делая ходы поочередно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнёт последнее число. Докажите, что у первого игрока есть способ играть так, чтобы всегда выигрывать.