

Неравенства

Неравенства о средних (x_1, x_2, \dots, x_n — положительные числа):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

1. Найдите наименьшее значение выражения при положительных x и y

(а) $x + \frac{1}{x}$; (б) $3x + \frac{1}{4x}$; (с) $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; (д*) $x^2 + \frac{1}{x}$.

2. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n^2.$$

3. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 \geq \frac{ab+bc+ac}{3}.$$

4. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

5. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных

(а) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$;

(б) $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Даны вещественные $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

8. Докажите, что для положительных a выполнено неравенство:

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16.$$