

**ММИ. Тождества. Добавка.**

1. Докажите тождество:  $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ .

2. Упростите выражение:  $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n(2n-1)$ .

3. Упростите выражение:  $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$ .

4. Упростите выражение:  $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1}$

5. **Серия «задач про Васю».** Найдите ошибку в следующих рассуждениях:

(а) «Утверждение». При любом натуральном  $n$  числа  $n$  и  $n+1$  равны.

«Доказательство». Предположим, что утверждение верно для  $n = k$ , то есть  $k = k+1$ . Прибавляя к обеим частям этого равенства единицу, получаем, что  $k+1 = k+2$ . Рассуждая так дальше, получаем, что все числа равны.

(б) «Утверждение». При разбиении прямоугольника на  $n > 2$  прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины.

«Доказательство». При  $n = 2$  утверждение верно. Предположим, что при разбиении прямоугольника на  $k > 2$  прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины. Разделим какой-нибудь прямоугольник на два прямоугольника. Тогда эти у этих двух прямоугольников совпадают две вершины. Итак, мы получили, что данный прямоугольник разбит на  $k+1$  прямоугольников среди которых есть два, у которых совпадают две вершины.

(с) «Утверждение». Любые  $n$  точек лежат на одной прямой.

«Доказательство». При  $n = 1$  это ясно. Предположим, что любые  $k$  точек лежат на одной прямой и докажем, что любые  $k+1$  точек лежат на одной прямой. Рассмотрим произвольные  $k+1$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ . Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую  $l$ , на которой лежат точки  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Нам надо доказать, что и последняя точка  $A_{k+1}$  лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам  $A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$ . Получим, что они все лежат на некоторой прямой  $l_0$ . Но прямые  $l$  и  $l_0$  совпадают, так как обе они проходят через точки  $A_2$  и  $A_k$ , а как известно, через две точки можно провести только одну прямую. Поэтому все  $k+1$  точек лежат на одной прямой.