

Графы, продолжение

Определение: Реберный путь в графе — последовательность вершин графа, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром.

Определение: Связный граф — граф, между любыми двумя вершинами которого существует реберный путь.

1. В графе 100 вершин, причём степень каждой из них не меньше 50. Доказать, что граф связан.
2. В теннисном турнире 20 лмпшат сыграли 8 туров: каждый сыграл с 8 разными лмпшатами. Докажите, что найдутся три лмпшонка, не сыгравшие между собой пока ни одной игры.
3. Известно, что в лагере каждый лмпшонок знаком не менее, чем с половиной лмпшат. Докажите, что можно выбрать четырёх лмпшат и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми (известно, что в лагере больше 4 лмпшат).
4. В Тридевятиом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
5. В некотором графстве 57 деревень, между некоторыми из которых проложены дороги. Известно, что из каждой деревни можно попасть в любую другую, притом по единственному маршруту. Докажите, что найдётся деревня, из которой выходит лишь одна дорога и определите сколько дорог в графстве?
6. Между городами организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города можно добраться до любого другого (возможно с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединен или с A или с B . Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем с двумя пересадками.

Определение: Цикл — связный граф, степень каждой вершины которого ровно 2.

Определение: Дерево — связный граф без циклов.