

Графы, начало

Определение: Графом называется множество $G = (V, E)$, где V — множество вершин (некоторые объекты, в нашем случае — точки на плоскости), а E — множество ребер, являющееся подмножеством пар (*) вершин объединенных некоторым свойством.

«Подмножество пар» — тоже можно обобщить, но мы не будем этого делать.

Определение: Степень вершины v графа, $deg(v)$ — количество выходящих из этой вершины ребер.

Определение: Граф называется полным, если каждая его вершина соединена с каждой. Другое название полного графа — КЛИКА, обозначается K_n , где n — число вершин.

0. Сколько ребер в полном графе? Как вообще посчитать количество ребер в графе, зная число вершин и степень каждой из них?
1. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
(а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2? (б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
2. Семь лмшат играли в шахматы. Известно, что Антон сыграл шесть партий, Боря — пять, Вася и Гена — по три, Дима и Емеля — по две, Женя — одну. Кто с кем сыграл?
3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит три дороги, быть ровно 100 дорог?
5. Семь футбольных команд играют однокруговой турнир. Докажите, что в любой момент времени есть 2 команды, сыгравших одинаковое число матчей.
6. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
8. В лагерь приехали дети. У каждого из детей ровно 5 знакомых мальчиков и ровно 5 знакомых девочек. Докажите, что число детей делится на 4.
9. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых и 2 черных (сверху два белых, снизу два черных). Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?