Многочлены

Определение. *Многочленом степени n* называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ — действительные числа называемые *коэффициентами многочлена*, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*. Степень многочлена f обозначается $\deg f$.

Определение. Многочлен A *делится* на ненулевой многочлен B, если существует многочлен Q, называемый *частным* такой, что $A = B \cdot Q$.

Определение. Разделить многочлен A на ненулевой многочлен B с остатком — это найти многочлены Q, R такие, что выполнено равенство $A = B \cdot Q + R$, причем $\deg R < \deg B$ или $R = 0$. Многочлен Q называется *неполным частным*, многочлен R называется *остатком*.

1. Найдите все натуральные n, при которых число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

2. Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $x^n + x^2 + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$.

3. **(a) (Теорема Безу)** Докажите, что остаток от деления многочлена P на $(x - a)$ равен $P(a)$:
$$P(x) = H(x) \cdot (x - a) + P(a).$$

(b) (Следствие) Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.
(c) (Еще одно следствие) Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $Q(a) - Q(b) \vdots (a - b)$ для любых целых различных a и b.

4. Разделите многочлен x^{100} на $x + 1$ с остатком.

5. **(a)** При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = x^n + ax^{n-2}$ $(n \geqslant 2)$ делится на $x - 2$?
(b) При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $(x-1)(x-2)$?

6. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

7. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2019$, $P(2019) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

8. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

9. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

10. Многочлен $x^3 + px^3 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

11. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

12. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

В этих двух листиках суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 9 плюсиков;
4 — 12 плюсиков;
5 — 14 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 11 мая.