Вписанные углы. Задачи для самостоятельного решения.

1. В треугольнике ABC проведена средняя линия KN (K — середина AB, N — середина BC). На отрезках KB и BN отмечены точки L и M соответственно так, что $ALMC$ — вписанный. Докажите, что $KLMN$ — вписанный.

2. AH – высота остроугольного треугольника ABC, K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

3. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R – на стороне AB(точки A и P находятся в одной полуплоскости относительно CR). Докажите, что $AP \parallel BQ$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

5. В треугольнике ABC $AB > BC$, и на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N. Докажите, что точки A, P, M, N лежат на одной окружности.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая вторично окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

7. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1||AD$.

9. Дан треугольник ABC.
(a) Докажите, что биссектриса угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.
(b) Докажите, что биссектриса угла, смежного с углом B, и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

10. **Лемма о трезубце.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

(a) Теорема о трилистнике. Прямая BI пересекает описанную окружность треугольника ABC второй раз в точке D. Докажите, что $DA = DC = DI$.

(b) Теорема Мансиона. Пусть I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что $DI = DI_b$.

11. На «меньших» дугах AB и BC описанной окружности треугольника ABC отмечены середины — M и N. Пусть X — середина отрезка MN. Докажите, что $BX = XI$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

12. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC + \angle ABD = 90°$. На диагонали BD отмечена точка E, причём $BE = AD$. Из неё на сторону AB опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $CD + EF < AC$.

13. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этим двум листикам конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.
3 — 9 плюсиков;
4 — 11 плюсиков;
5 — 13 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 16 марта.