Транснеравенство

1. **Транснеравенство.** Даны два набора чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant bn$ и перестановка σ на множестве $\{1, 2, \cdots, n\}$. Тогда:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_{\sigma(1)}+a_2b_{\sigma(2)}+\ldots+a_nb_{\sigma(n)} \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

(a) Докажите транснеравенство для $n = 2$;
(b) Докажите левую часть транснеравенства;
(c) Докажите правую часть транснеравенства.

Все неравенства надо доказывать через транснеравенство.

2. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{abc}.$$

3. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

4. Для положительных a, b, c докажите, что

$$ab + bc + ac \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

5. Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

6. **Неравенство Чебышёва.** Даны два набора чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant bn$. Докажите, что

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

7. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leqslant \frac{3(ab+bc+ac)}{2(a+b+c)}.$$