

Турниры

- Мы с тобой подрались недавно.
- Я победил?
- Не, я легко тебя одолел.
- Быть того не может.
- Ну я ж врать не стану.

Разговор Брюса Бэннера и Тора

Определение. Турнир — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро. Он называется турниром, поскольку моделирует однокруговой турнир, в котором нет ничьих.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A , B , C и D , что A выиграла у B , C и D ; B выиграла у C и D , C выиграла у D .
2. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды A , B , C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C — у A .
3. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.
4. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

Определение. Гамильтонов путь — это путь (ориентированный), который проходит через каждую вершину ровно один раз. По аналогии с путём определяется Гамильтонов цикл.

Определение. Граф называется сильно связным, если из любой вершины можно попасть в любую перемещаясь только по стрелкам.

5. (а) Докажите, что в любом турнире существует Гамильтонов путь. (Надо рассмотреть путь максимальной длины и предположить, что он не проходит по всем вершинам.)
(б) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть Гамильтонов цикл.
6. Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует хотя бы (а) 1; (б) 2 вершины такие, что при удалении одной из них сильная связность графа не теряется.