Математическая индукция

1. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

4. Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

5. Докажите, что
$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \ldots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}.$$

6. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи (никакие три прямые не проходят через одну точку).

7. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета.

8. Докажите, что если клетчатая доска $n \times n$ покрашена в 4 цвета так, что любой квадрат 2×2 содержит все четыре цвета, то: если n — чётно, то в углах квадрата стоят разные цвета; если n — нечётно, то клетки в углах раскрашены не более, чем в 2 цвета.

9. Пусть x — такое, что $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — целое для любого натурального n.