# Мультипликативные функции

**Определение.** Будем называть функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ мультипликативной, если $f(n \cdot k) = f(n) \cdot f(k)$ для взаимно простых $n$ и $k$.

**1.** Рассмотрим функцию $C(n)$, равную количеству делителей числа $n$.
**(a)** Вычислите $C(8), C(15), C(120)$. Удостоверьтесь, что $C(8) \cdot C(15) = C(120)$.
**(b)** Чему равно $C(p^\alpha)$?
**(c)** Докажите, что $C(n)$ — мультипликативная функция.
**(d)** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $C(n)$.

**2.** Рассмотрим функцию $S(n)$, равную сумме всех делителей числа $n$.
**(a)** Вычислите $S(8), S(15), S(120)$. Удостоверьтесь, что $S(8) \cdot S(15) = S(120)$.
**(b)** Чему равно $S(p^\alpha)$? Выведите формулу без многоточия.
**(c)** Докажите, что $S(n)$ — мультипликативная функция.
**(d)** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $S(n)$.

**3.** Натуральное число $n$ таково, что сумма всех его делителей равна $D$, а сумма всех чисел, обратных его делителям, равна $d$. Найдите число $n$.

**Определение.** Функция Эйлера $\varphi(n)$ — функция, равная количеству натуральных чисел, меньших либо равных $n$ и взаимно простых с ним.

**Пример.** Несложно вычислить, что $\varphi(15) = 8$. Действительно, среди чисел от 1 до 15, только 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 и 14 взаимно просты с 15.

**4.** **(a)** Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^\alpha)$? ($p$ — простое число)
**(b)** В таблицу $a \times b$ ($a$ строк, $b$ столбцов) выписаны все числа от 1 до $ab$ подряд (в начале заполняется первая строка, потом вторая и т.д.) для

$$(a = 5; b = 7); (a = 8; b = 5).$$

Сколько в таблице чисел, взаимно простых с $b$? Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с $a$?
**(c)** Какими будут ответы на эти вопросы для произвольных $a$ и $b$ таких, что НОД$(a, b) = 1$?
**(d)** Докажите, что $\varphi(n)$ — мультипликативная функция.
**(e)** Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$?