Деревья

Определение. Будем давать несколько определений дерева:

- Связный граф без циклов.
- Граф, между любыми двумя вершинами которого существует единственный путь.
- Связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.
- Связный граф, количество ребер которого на 1 меньше количества вершин.

Определение. Листом (висячей вершиной) называется вершина дерева, которая имеет степень 1.

Теоретические задачи

1. Докажите, что первое и второе определения дерева эквивалентны.
2. Докажите, что первое и третье определения дерева эквивалентны.
3. (а) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) из более чем одной вершины есть лист.
(б) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) из более чем одной вершины есть хотя бы два листа.
4. Докажите, что первое и четвертое определения дерева эквивалентны.
5. **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.

Практические задачи

1. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?
2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
3. Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку 100×100 клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента?
4. Имеется связный граф. Докажите, что в нем можно выбрать одну из вершин так, чтобы после ее удаления вместе со всеми ведущими из нее ребрами остался связный граф.

5. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более (а) 198 перелетов; (б) 196 перелётов.
6. (а) В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество листов больше половины общего количества вершин.
(б) Пусть d — наибольшая степень вершины дерева. Докажите, что в этом дереве есть хотя бы d листов.
7. В графе на 31 вершине все ребра покрашены в один из трех цветов так, что при удалении всех ребер любого цвета граф остается связным. Какое минимальное количество ребер может быть в этом графе?