Индукция

-2. Докажем при помощи математической индукции, что $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

-1. «Ханойская башня». Имеется три стержня одинаковой высоты. На первом расположена пирамида из n колец возрастающих размеров, два других стержня пустые. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что такими операциями можно переложить все кольца с первого стержня на последний.

0. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти:
«Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n-1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти.»
Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

1. Докажите, что если плоскость разбита на части **(a)** прямыми; **(b)** прямыми и окружностями, то получившуюся «карту» можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

2. Ваня нарисовал на плоскости треугольник. Серёжа провел n прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

3. Докажите при помощи индукции известный нам факт: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

5. Доказать, что квадрат **(a)** 4×4; **(b)** 8×8; **(c)** $2^n\times2^n$ без одной клетки (может быть вырезана любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины) можно разрезать на уголки из трех клеток.

6. Теперь мы умеем переложить Ханойскую башню высоты n на соседний стержень.
(a) Докажите, что это можно сделать за 2^n-1 операций.
(b) А можно ли сделать это быстрее, чем за 2^n-1 операций?

7. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

8. На плоскости провели n прямых общего положения (никакие две из них не параллельны, никакие три из них не проходят через одну точку). Докажите, что плоскость оказалась разделена этими прямыми на $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ частей.

9. В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Указом президента решено оставить либо только автодороги, либо только метро, а второй вид транспорта убрать навсегда. Докажите, что указ можно выполнить так, что при этом из любого города можно будет добраться в любой другой.