Сравнение по модулю. Добавка

Определение первое, основное.
Если числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что они сравнимы по модулю m. Обозначают это следующим образом: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Определение второе, альтернативное.
Необязательно доказывать равенство остатков, достаточно проверить разность. Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда число $a - b$ делится на m.

Свойства сравнений.

(a) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$;
можно заменять числа по цепочке

(b) $a \underset{m}{\equiv} a + km$, где k — целое число;
можно прибавить или вычесть число, кратное m

(c) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + c$;
можно заменить слагаемое из суммы на сравнимое с ним число

(d) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$;
можно заменить каждое слагаемое из суммы на сравнимое с ним число

(e) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$;
можно заменить множитель из произведения на сравнимое с ним число

(f) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$.
можно заменить каждый множитель из произведения на сравнимое с ним число

(g) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^n \underset{m}{\equiv} b^n$.
можно заменить основание степени на сравнимое с ним число

Упражнения.

1. Найдите остаток от деления:
(a) $1001 + 1002 + \ldots + 1009 + 1010$ на 5;
(b) $900 + 901 + \ldots + 1099 + 1100$ на 1000;
(c) $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
(d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 102$ на 103.

2. Найдите остаток от деления:
(a) 9^{2019} на 8; **(b)** 8^{2019} на 9; **(c)** 2^{2019} на 5; **(d)** 2^{2019} на 7.

3. Докажите, что:
(a) $29^{99} + 31^{99}$ делится на 30; **(b)** $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66;
(c) $3^{1794} + 5^{1794}$ делится на 30; **(d)** $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7.