Сравнение по модулю

Определение. Если числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что они сравнимы по модулю m. Обозначают это следующим образом: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

0. **Определение второе, альтернативное.** Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда число $a - b$ делится на m.

1. **Свойства сравнений.**
(a) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$;
(b) $a \underset{m}{\equiv} a + km$, где k — целое число;
(c) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + c$;
(d) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$;
(e) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$;
(f) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$.
(g) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^n \underset{m}{\equiv} b^n$.

2. Найдите остаток от деления:
(a) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11;
(b) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
(c) $2017 \cdot 2016 \cdot 2015 + 2019 \cdot 2020 \cdot 2021$ на 2018.

3. Найдите остаток от деления:
(a) 8^{2018} на 7; **(b)** 6^{2018} на 7; **(c)** 3^{2018} на 7.

4. Найдите остаток от деления:
(a) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11; **(b)** $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11.

5. Докажите, что:
(a) $2^{2016} \underset{5}{\equiv} 3^{2016}$; **(b)** $2^{2016} \underset{13}{\equiv} 3^{2016}$;
(c) найдите еще одно простое число p, для которого $2^{2016} \underset{p}{\equiv} 3^{2016}$.