# Треугольник Паскаля

В треугольнике Паскаля по краям в каждой строке стоят единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

**1.** **(a)** Докажите, что если в задаче про робота в каждой клетке таблицы написать количество путей до неё, получится треугольник Паскаля.
**(b)** Докажите, что в треугольнике Паскаля записаны биномиальные коэффициенты.

**2.** **(a)** Докажите, что сумма чисел в каждой строке треугольника Паскаля в два раза больше, чем сумма чисел в предыдущей строке.
**(b)** Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

**3.** **(a)** Докажите, что в любой строчке треугольника Паскаля сумма чисел, стоящих на четных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах.
**(b)** Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots \pm C_n^n = 0$.

**4.** У Тома Сойера есть забор из 2n досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?

**5.** Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали (по линии, параллельной правой стороне треугольника), начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом $a$.

**6.** Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный левой и правой диагоналями, на пересечении которых стоит число (сами диагонали в параллелограмм не включаются).

**7.** Докажите, что:
**(a)** $(n-k) \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^k$;
**(b)** $C_n^1 + 6 \cdot C_n^2 + 6 \cdot C_n^3 = n^3$;
**(c)** $C_n^1 + 14 \cdot C_n^2 + 36 \cdot C_n^3 + 24 \cdot C_n^4 = n^4$;
**(d)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^k \cdot C_n^k = (-1)^k \cdot C_{n-1}^k$;
**(e)** $C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + \cdots + C_n^n \cdot 2^n = 3^n$.