Про робота, сочетания и бином Ньютона

1. *Вспомним сочетания.* В цветочном магазине есть 10 сортов цветов. Сколько букетов из 2 разных цветков можно собрать? А из 4 разных цветков?

2. Робот стоит в левом верхнем углу таблицы 6×11. Пронумеруем строки таблицы сверху вниз числами от 0 до 5, а столбцы слева направо (от 0 до 10). По команде робот может передвинуться по клетчатой доске либо на 1 клетку вправо либо на 1 клетку вниз.
(a) Сколько команд понадобится роботу, чтобы он оказался в клетке (3,1) (третья строка, первый столбец)?
(b) Последовательность команд будем называть программой. Напишите все возможные программы, чтобы робот оказался в клетке (3,1).
(c) Какой длины должна быть программа, чтобы робот оказался в правой нижней клетке таблицы? Сколько команд «вправо» должно быть в такой программе? Сколько существует таких программ?
(d) Сколько существует программ, чтобы робот оказался в клетке (m, n)?

3. Биномом Ньютона называют выражение $(a+b)^n$ после раскрытия скобок.
(a) Раскройте скобки в выражении $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$. Сколько получится слагаемых, где в произведении две буквы a и одна буква b? Из каких скобок пришли эти буквы (какие индексы имеют)?
(b) Рассмотрим слагаемые, посчитанные в предыдущем пункте. Каждому из них сопоставим программу, руководствуясь правилом «если из i-ой скобки пришла буква a, то i-ый шаг робота будет вправо, а если буква b, то вниз». В какую клетку таблицы приведут нас эти программы?
(c) Какой коэффициент окажется при слагаемом $a^i b^{n-i}$ в биноме Ньютона?

4. Робот оказался в клетке (m, n).
(a) В каких клетках таблицы мог находиться робот на предпоследнем шаге? Сколькими способами можно попасть в эти клетки?
(b) Используя предыдущий пункт докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
(c) Используя формулу C_n^K докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

5. **(a)** Сколько существует программ длиной n? Куда может прийти робот за n команд?
(b) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

6. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots \pm C_n^n = 0$,
(a) пользуясь пунктом 4 (b);
(b) подобрав хорошие a и b для бинома Ньютона.