

Диофантовы уравнения

1. Для настилки пола шириной в 3 метра имеются доски шириной в 11 см и 13 см. Сколько нужно взять досок того и другого размера, чтобы не пришлось пилить?
2. Коля умеет печатать 7-рублёвки, а Петя — 13-рублёвки.
 - (а) Может ли Коля заплатить Пете 100 рублей (со сдачей)?
 - (б) Может ли Петя заплатить Коле 100 рублей (со сдачей)?
 - (с) В каждом случае, когда можно, какое наименьшее количество купюр им придётся напечатать?
3. Петя и Коля объединились. Могут ли они заплатить в магазине без сдачи:
 - (а) 999 рублей? (б) 58 рублей?
 - (с) Какое наибольшее целое число рублей они не смогут заплатить без сдачи?
 - (д) Сколькими способами они могут заплатить без сдачи 2019 рублей?
4. Пусть принтер умеет печатать в неограниченном количестве купюры достоинством m рублей или n рублей (m и n взаимно просты).
 - (а) Докажите, что ими можно без сдачи заплатить любую сумму, не меньшую mn рублей.
 - (б) Докажите, что наибольшее число рублей, которое нельзя заплатить без сдачи, равно $mn - m - n$.
5. В лифте действуют две кнопки: одна позволяет подниматься на 5 этажей вверх, а другая позволяет спускаться на 3 этажа вниз. Будем говорить, что лифтом можно пользоваться, если с его помощью можно попасть с любого этажа на любой другой.
 - (а) Докажите, что существует такое N , что в доме высотой по крайней мере в N этажей пользоваться таким лифтом можно.
 - (б) Найдите наименьшее такое N .
 - (с) Если лифт может только подниматься на a этажей и спускаться на b этажей (числа a и b взаимно просты), чему будет равняться наименьшее N ?
6.
 - (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое ровно двумя способами можно представить в виде $3x + 4y$, где x и y — натуральные числа.
 - (б) Найдите наименьшее c , при котором уравнение $7x + 9y = c$ имеет ровно шесть натуральных решений.
 - (с) Найдите наименьшее c , при котором уравнение $7x + 9y = c$ имеет ровно n натуральных решений.
 - (д) Пусть числа a и b взаимно просты. Докажите, что для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ имело ровно n натуральных решений, значение c должно находиться между $(n - 1)ab + a + b \leq c \leq (n + 1)ab$.