Алгоритм Евклида 2

1. Вы уже знаете, что $(a, b) = (a - bk, b)$. Докажите также следующие свойства:

(a) если $a \vdots b$, то $(a, b) = b$ и $[a, b] = a$;
(b) $(ak, bk) = k \cdot (a, b)$;
(c) если $(a, b) = r$, то $(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}) = 1$;
(d) $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$;
(e) $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

2. При помощи алгоритма Евклида найдите: **(a)** $(111111, 1111)$;
(b) $(\underbrace{111\ldots1}_{15}, \underbrace{111\ldots1}_{6})$; **(c)** $(\underbrace{111\ldots1}_{231}, \underbrace{111\ldots1}_{165})$; **(d)** $(\underbrace{111\ldots1}_{a}, \underbrace{111\ldots1}_{b})$.

3. **(a)** Найдите остаток при делении $2^5 - 1$ на $2^3 - 1$.
Найдите: **(b)** $(2^5 - 1, 2^3 - 1)$; **(c)** $(2^{14} - 1; 2^6 - 1)$; **(d)** $(2^{100} - 1; 2^{120} - 1)$;
(e) $(2^a - 1, 2^b - 1)$; **(f)** $(n^a - 1, n^b - 1)$.

4. Найдите: **(a)** $(2n + 13, n + 7)$; **(b)** $(12n + 1, 30n + 2)$; **(c)** $(40n - 2, 11n - 1)$.

5. При каких n может быть сократимой дробь: **(a)** $\frac{2n+13}{n+7}$; **(b)** $\frac{12n+1}{30n+2}$; **(c)** $\frac{40n-2}{11n-1}$;
(d) $\frac{2n^2-1}{n+1}$; **(e)** $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$; **(f)** $\frac{n^4+1}{n^2+n+1}$; **(g)** $\frac{n^3+n+1}{n^2-n+1}$;

6. О натуральных числах a и b известно, что при любом натуральном k число $ak + 1$ делится на число $bk + 1$. Докажите, что $a = b$.

7. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab, где a и b – натуральные. Докажите, что $a = b$.