# Алгоритм Евклида

**1.** Хромой кузнечик прыгает по прямой, причем вправо он может прыгать только на 15 см, а влево только на 21 см. **( a )** Сможет ли он оказаться на 3 см левее начальной позиции? Если да, то как ему прыгать? **( b )** А если на 2 см правее? **( c )** В каких точках прямой он вообще может оказаться, прыгая по правилам?

**2.** От прямоугольника $1365 \times 165$ начали отрезать квадраты, причем сторона квадрата каждый раз равна меньшей стороне прямоугольника, и после отрезания каждый раз остается снова прямоугольник. В конце концов остался квадрат. Чему равна его сторона?

Будем использовать следующие обозначения: НОД$(a, b) = (a, b)$, НОК$(a, b) = [a, b]$.

**3.** Пусть есть натуральные числа $a \geqslant b$ и $(a, b) = r$.
**( a )** Докажите, что если большее из чисел заменить на их разность, то НОД не поменяется, то есть $(a - b, b) = (a, b) = r$.
**( b )** Докажите, что $(a - b \cdot k, b) = (a, b) = r$, где $k$ - целое.

**( c )** Докажите, что если $a \,\vdots\, b$, то $(a, b) = b$.

**Алгоритм Евклида**: для того, чтобы найти НОД двух чисел $a \geqslant b$, необходимо выполнить последовательно несколько делений с остатком:
$a = b \cdot q_1 + r_1$
$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$
$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$
$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$
$\dots$
$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$
$r_{n-1} = r_n \cdot q_n + 0$
На каждом шаге большее число заменяется на остаток от деления на меньшее. Так продолжается, пока очередной остаток не окажется нулевым $(r_{n+1} = 0)$.

**4.** Пользуясь результатами задачи №3, докажите, что в алгоритме $r_n = (a, b)$.

**5.** Найдите алгоритмом Евклида **( a )** $(1365, 165)$; **( b )** $(12751, 10537)$.

**6.** Докажите, что $r_1, r_2, \dots r_n$ можно представить в виде $a \cdot m + b \cdot k$, где $m$ и $k$ — целые.

**7.** Найдите какие-нибудь целые $x$ и $y$ для которых: $998x + 546y = 2$.

**8.** Докажите, что если $a$ и $b$ взаимно просты, то уравнение $ax + by = 1$ имеет решение в целых числах.