Индукция

Алгебра

1. Докажите:
(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

2. Для каких натуральных n выполняется неравенство: $2^n > n^2$

3. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n.

4. Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных элементов Фибоначчи.

5. Докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$, при $n > 1$.

6. Покажите, что любое число представимо в виде $*1^2 * 2^2 * 3^2 * \dots * n^2$, для некоторого n и выбора $+$ или $-$ вместо каждой $*$.

Комбинаторика

1. Треугольник разбили n отрезками с концами на сторонах. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.

2. Докажите, что для любого натурального n можно разбить квадрат со стороной 2^n без угловой клетки на трехклеточные уголки.

3. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

4. n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n.

5. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 3$) вершины покрашены в три цвета таким образом, что каждый цвет присутствует, причём никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет. Докажите, что его можно разбить не пересекающимися диагоналями на треугольники, в каждом из которых вершины покрашены в разные цвета.

6. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?