# Малая теорема Ферма

1. **Доказательство вам уже рассказали, теперь мы хотим услышать его от вас.**
Пусть $a$ — некоторое число, которое не делится на простое число $p$.
**(a)** Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю $p$.
**(b)** Докажите, что $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \underset{p}{\equiv} (p-1)!$.
**(c)** **Малая теорема Ферма** Докажите, что $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

2. Используя МТФ (Малую теорему Ферма) найдите остаток от деления
**(a)** $2^{102}$ на 101;
**(b)** $8^{900}$ на 29;
**(c)** $23^{1600}$ на 41.

3. Докажите, что
**(a)** $7^{120} - 1$ делится на 143;
**(b)** $300^{3000} - 1$ делится на 1001;
**(c)** при любом натуральном $n$ выражение $n^7 - n$ делится на 42.

4. Докажите, что либо $n^{18} - 1$, либо $n^{18} + 1$ делится на 37, если $n$ не делится на 37.

5. Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13 ($a, b, c, d, e, f$ — целые числа). Докажите, что $abcdef$ делится на $13^6$.

6. Пусть $p$ и $q$ различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

### Интересные задачи

7. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

8. Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что
**(a)** число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на $p$;
**(b)** число $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ не делится на $p$.

9. Найти все такие простые числа $p$, что число $5^{p^2} - 1$ делится на $p$.

10. Докажите, что для любого простого $p$ число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.

11. Может ли число $2^{1260} + 3^{1260} - 1$ быть точной десятой степенью?