

Обратные остатки и теорема Вильсона

Утверждение. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a . Существует и при том единственный остаток b , что $ab \equiv 1 \pmod{p}$ (такой остаток b называется *обратным* остатка a).

(Теорема Вильсона) Пусть p — некоторое простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

- Пусть $5x + 8y \equiv 1 \pmod{13}$
 - Докажите, что $5x + 60y \equiv 1 \pmod{13}$;
 - Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13;
 - Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.
- Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю (а) 19; (б) 23.
- В Москве каждую секунду один из жителей ест печенючку. Доказать, что если собрать все печенючки, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных кучек.
- Пусть $a_1, \dots, a_p - p$ ($p > 2$ — простое число) подряд идущих чётных чисел. Докажите, что:
 - существует некоторый член последовательности a_m , делящийся на p ;
 - существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p ;
 - существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p^2 .
- Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$.
- Обратная теорема Вильсона** Докажите, что если $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то число n — простое.
- Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2 .
- Пусть числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.
- На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \dots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
 - Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \equiv -n \pmod{101}$.
- Найдите все простые числа p , такие что $(p-2)!$ не делится на $(p-1)$.
 - Дано простое число p . При каких n число $p^n - 1$ делится на $(p-1)^2$.
 - Для каких натуральных n число $(n-1)! + 1$ является точной степенью n .