

## Делимость и алгебра

### Основные свойства делимости

1. Если два числа делятся на третье, то их сумма и разность тоже делится на это число.
2. Если число  $a$  делится на число  $b$ , а число  $b$  делится на число  $c$ , то число  $a$  делится на число  $c$ .
3. Если число  $a$  делится на число  $b$ , а число  $c$  делится на число  $d$ , то число  $ac$  делится на число  $bd$ .
4. Если произведение целых чисел  $ab$  делится на простое число  $p$ , то на это число делится хотя бы один из множителей.

### Задачи на использование свойств делимости

1. Докажите, что если  $a + 2$  делится на 11 и  $35 - b$  делится на 11, то  $a + b$  делится на 11.
2. Даны два целых числа  $a, b$ . Известно, что их сумма и произведение делятся на 9. Доказать, что сумма их кубов делится на 81.
3. Про четыре числа известно, что сумма любых трёх из них делится на 5. Докажите, что каждое из чисел делится на 5.
4. (а) Существует ли такое натуральное  $n$ , при котором дробь  $\frac{2n+1}{4n+3}$  сократима? На какое число её можно сократить?  
(б) Тот же вопрос про дробь  $\frac{5n+2}{8n-2}$ .
5. Целые числа  $a, b$  подобраны так, что число  $A = (16a + 17b)(17a + 16b)$  делится на 11. Доказать, что число  $A$  делится на 121.
6. Можно ли так подобрать четыре попарно различных натуральных числа, чтобы каждое из них делилось на разность любых двух из трёх оставшихся?
7. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа, большие 1, и  $a^2 + b^2 - 1$  делится на  $b + a - 1$ . Докажите, что число  $b + a - 1$  — составное.