

Подсчет двумя способами

1. Можно ли расставить по кругу 7 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трех расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных $-2, \dots$, каких-то трех подряд расположенных -7 ?
2. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?
3. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.
4. На доске написано несколько натуральных чисел с суммой 100.
(а) Петя посчитал сколько на доске написано чисел и записал результат. Затем Петя посчитал, сколько чисел, больших 1, было выписано на доску и также записал результат. Потом он посчитал, сколько чисел, больших 2, первоначально было выписано на доске и записал результат. И так далее... Докажите, что сумма выписанных Петей чисел также равна 100.
(б) Вася проделал те же операции, но только с числами Пети. Докажите, что у Васи получился первоначальный набор чисел.
5. Дан набор, состоящий из таких 179 чисел, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.
6. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник M , причем все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M , равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри.
7. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки. Для каждого города статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих данный город с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. Могло ли у него получиться 100000?