Сравнения

Определение. Числа, дающие одинаковые остатки при делении на m, называются **сравнимыми по модулю** m.

Обозначается $a \equiv b \pmod{m}$.

Упражнение. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

Свойства сравнений.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, k – произвольное целое число. Тогда:

a) $ka \equiv kb \pmod{m}$; b) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$; c) $ac \equiv bd \pmod{m}$; d) $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

1. Найдите остатки от деления
   (a) $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
   (b) $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$ на 2018;
   (c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 102$ на 103.
   (d) 47^{101} на 46, 48, 31;
   (e) $7^{2012} + 9^{2015}$ на 10;
   (f) 3^{2016} на 7.
2. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$;
3. Докажите, что при любом натуральном n:
   (g) $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7;
   (h) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.
4. Докажите, что $2013! + \dfrac{4026!}{2013!}$ делится на 4027.
5. Докажите, что число $(3^n - 1)^n - 4$ делится на $3^n - 4$ при любом натуральном n.
6. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечетном n.
7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел не представимых в виде суммы трёх точных кубов.
8. Существует ли натуральное n, такое что $n^2 + n + 1$ делитя на 2015.
9. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + \ldots + 10^{10000000000}$.