

Остатки

1. Число a даёт остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 5. Какой остаток может давать число a при делении на 15? на 30?
2. Натуральное число a таково, что $a + 2$ делится на 5. Докажите, что $7a + 4$ также делится на 5.
3. Нарисуйте таблицу умножения остатков при делении на:
(а) 3;
(б) 4;
(с) 5.
4. Найдите все натуральные n , для которых $2^n + 33$ — точный квадрат.
5. Пусть $p > 3$ простое число. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.
6. Найдите остаток от деления на 8 числа 267^{2018} .
7. Докажите, что $123^{128} + 4^{666}$ делится на 17.
8. Может ли десятичная запись точного квадрата состоять из 100 нулей, 100 единиц, 100 двоек и 100 троек?
9. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.
10. Докажите, что уравнение
(а) $x^2 + y^2 = 201820172016$;
(б) $15x^2 - 7y^2 = 9$
не имеет решений в целых числах.
11. Решите в целых числах $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$.
12. Найдите все простые числа p, q, r , удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.
13. Докажите, что при любом натуральном n число $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133.
14. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$.
15. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.