

Графы. Рассуждения и связность.

1. В лагерь приехали дети. У каждого из детей ровно 5 знакомых мальчиков и ровно 5 знакомых девочек. Докажите, что число детей делится на 4.
2. Известно, что в лагере каждый школьник знаком не менее, чем с половиной школьников. Докажите, что можно выбрать четырёх школьников и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми (известно, что в лагере больше 4 школьников)
3. В неизвестной стране из города Столичный выходит 21 дорога, а из города Дальний — ровно одна. Из остальных городов — по 20 дорог. Докажите, что из города Дальний можно попасть в Столичный.
4. В теннисном турнире 20 школьника сыграли 8 туров: каждый сыграл с 8 разными школьниками. Докажите, что найдутся 3 школьника, не сыгравшие между собой пока ни одной игры.
5. В кружке учатся 20 человек, при этом, какую бы тройку людей мы ни взяли, в ней всегда найдутся двое знакомых. Докажите, что кто-то в этой группе знает хотя бы 9 человек.
6. В некоторой компании каждый дружит не более чем с тремя другими и любые двое или дружат или имеют общего друга. Какое наибольшее число людей может быть в этой компании?
7. Между городами организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города можно добраться до любого другого (возможно с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединен или с A или с B . Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем с двумя пересадками.
8. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2018×2018 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
9. (а) Докажите, что среди 6 людей либо трое попарно знают друг друга, либо трое попарно не знают друг друга.
(б) На олимпиаде в одной аудитории оказалось 10 человек из одной школы. Докажите, что среди них найдутся либо три попарно незнакомых человека, либо четыре попарно знакомых человека.
(в) Та же задача для 9 человек.
(г) В маршрутке ругаются 18 человек. Докажите, что среди них есть либо четвёрка людей, попарно знающих друг друга, либо четвёрка людей, попарно не знающих друг друга.