

Чётность и чередование

1. В плоскости расположено 11 шестерёнок таким образом, что первая сцеплена со второй, вторая — с третьей, ..., одиннадцатая — с первой. Первую шестерёнку мы начинаем вращать по часовой стрелке. Куда будет вращаться вторая? Может ли эта конструкция вообще вращаться?
2. Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?
3. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?
4. Ученица 5 класса Лиза и несколько её одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит пять мальчиков, то сколько там стоит девочек?
5. На шахматной доске 5×5 клеток расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней с той, на которой она стояла в прошлый раз (соседняя по горизонтали или вертикали, но не наискосок)?
6. Представим себе большой куб, склеенный из 27 меньших кубиков. Термит садится на центр грани одного из наружных кубиков и начинает прогрызать ход. Побывав в кубике, термит к нему уже не возвращается. Двигается он при этом всегда параллельно какому-нибудь ребру большого куба. Может ли термит прогрызть все 26 внешних кубиков и закончить свой ход в центральном кубике? Если возможно, покажите, каким должен быть путь термита.
7. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?
(Простое число — число, делящееся только на себя и 1, например 13 и 29.)