Корни из единицы

1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни n-ой степени из единицы.
(a) Докажите, что среди них можно выбрать корень α такой, что для любого α_i найдется целое число k такое, что $\alpha_i = \alpha^k$.
(b) Сколько существует таких корней?

2. Докажите, что $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Вычислите сумму k-х степеней корней n-й степени из 1, где k, n — натуральные числа, если
(a) НОД$(k, n) = 1$;
(b) НОД$(k, n) \neq 1$.

4. **(a)** Пусть $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n}$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{n-1}).$$

(b) Для каких других корней n-ой степени из единицы это тождество выполняется?
(c) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(d) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

5. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, вписанный в окружность единичного радиуса. Найдите произведение длин всех его сторон и диагоналей.

6. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром O ($AO = 1$). Точка P симметрична точке О относительно точки А, докажите, что $PB \cdot PC = \sqrt{31}$.

7. Пусть $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n}$. Рассмотрим сумму

$$S_n = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^9 + \ldots + \alpha^{(n-1)^2}.$$

Докажите, что $|S_n| = \sqrt{n}$.
Стоит рассмотреть произведение $S_n\overline{S_n}$.