# Тригонометрическая запись комплексного числа

**Определение.** Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем $r$ определяется единственным образом, а $\varphi$ — с точностью до кратного $2\pi$ (если число не равно нулю). Число $r$ называется *модулем* (и обозначается $|z|$), $\varphi$ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

**Упр.** Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1+i, 1-\sqrt{3}i$.

**1.** **(a)** Докажите, что $|zt| = |z|\cdot|t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
**(b)** Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

**2.** **(a)** Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
**(b)** **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

**3.** Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

**4.** Вычислите
**(a)** $\sqrt{1+i}$; **(b)** $(1+\sqrt{3}i)^{2018}$; **(c)** $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{146}$.

**5.** Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями $n$-ой степени из единицы.
**(a)** Представьте их в тригонометрической форме.
**(b)** Найдите сумму этих чисел.
**(c)** Найдите их произведение.
**(d)** Найдите их сумму квадратов.

**6.** **(a)** Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2018} + (x-i)^{2018} = 0.$$

**(b)** Найдите все его комплексные корни.

**7.** Упростите выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha.$$