

## Площади!!! И немного синусов.

1. Диагонали четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , пересекаются в точке  $M$ . Описанная окружность треугольника  $ABM$  пересекает отрезки  $AD$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно. Известно, что точка  $O$  лежит внутри треугольника  $AMB$ . Докажите, что четырехугольники  $NOMD$  и  $KOMC$  имеют равные площади.
2. Продолжение биссектрисы  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $E$ . Из точки  $D$  на стороны  $AB$  и  $AC$  опущены перпендикуляры  $DP$  и  $DQ$ . Докажите, что  $S_{ABC} = S_{APEQ}$ .
3. Продолжения медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекают его описанную окружность в точках  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  соответственно. Оказалось, что площади треугольников  $ABC_0$ ,  $AB_0C$  и  $A_0BC$  равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  равносторонний.
4. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $K$ . На биссектрисе угла  $AKD$  нашлась точка  $P$  такая, что прямые  $BP$  и  $CP$  делят пополам отрезки  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что  $AB = CD$ .
5. Квадрат  $ABCD$  вписан в окружность. Точка  $M$  лежит на дуге  $BC$ , прямая  $AM$  пересекает  $BD$  в точке  $P$ , прямая  $DM$  пересекает  $AC$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $S_{ABP} = S_{PQD}$ .
6. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $D$  — середина высоты, опущенной на гипотенузу  $AB$ . Прямые, симметричные  $AB$  относительно  $AD$  и  $BD$ , пересекаются в точке  $F$ . Найдите отношение площадей треугольников  $AFB$  и  $ABC$ .
7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  и на сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = BC_1$  и  $AL = CB_1$ . Докажите, что прямая  $AO$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , делит отрезок  $KL$  пополам.