# Комбинаторика в теории чисел

**1.** На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

**2.** Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число $l$. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на $l$, если
**(a)** $l = 9$;
**(b)** $l$ — нечётное число, не делящееся на 5.

**3.** Докажите, что одно из сравнений

$$x^2 \equiv 1 \pmod{101}$$
$$x^2 \equiv 2 \pmod{101}$$
$$\dots$$
$$x^2 \equiv 50 \pmod{101}$$

не имеет решений.

**4.** Докажите, что если $p$ — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

**5.** Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

**6.** Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

**7.** Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+, -, \times, :$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

**8.** Назовем число *хорошим*, если у него нет простых делителей, отличных от 2, 3 или 5. На доску выписали 81 хорошее число. Докажите, что из них можно выбрать четыре числа, произведение которых равняется точной четвертой степени некоторого натурального числа.

**9.** Дано натуральное число $k$. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях — одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды, что суммарная взятка на нем кратна $k$.