

## Ориентированные графы

1. В ориентированном графе 200 вершин, причем из каждой исходит ровно одно ребро и входит ровно одно ребро. Докажите, что можно провести не более 100 новых ребер так, чтобы граф стал сильно связным.
2. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
3. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды  $A, B, C$ , что  $A$  выиграла у  $B$ ,  $B$  выиграла у  $C$ , а  $C$  — у  $A$ .
4. Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины меньше либо равно двух.
  - (a) Докажите, что в любом полном ориентированном графе найдётся царь.
  - (b) Докажите, что в полном ориентированном графе не может быть ровно двух царей.
5. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с  $n > 4$  вершинами можно удалить одну из вершин, не потеряв при этом сильную связность.
6. В стране Ориентирия 100 городов, каждые два города соединены дорогой с двусторонним движением. Два министра играют в игру. Первый каждым своим ходом вводит одностороннее движение на любой еще не ориентированной дороге. Второй каждым своим ходом вводит одностороннее движение на любом количестве от 0 до 98 еще не ориентированных дорог. Игра заканчивается, когда все дороги ориентированы. Первый министр выигрывает, если найдется такой город, что из него можно выехать по какой-нибудь дороге и, соблюдая правила движения, вернуться обратно. Иначе выигрывает второй министр. Какой министр выигрывает при правильной игре?
7. В некотором государстве 101 город.
  - (a) Каждый город соединен с каждым из остальных дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
  - (b) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.